(1) 変曲点の求め方

関数 $y = x^4 - 2x^3$ の変曲点を求めるには、二階導関数を用いる。

まず、一次導関数を求める：

$$y' = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^3) = 4x^3 - 6x^2$$

次に、二階導関数を求める：

$$y'' = \frac{d}{dx}(4x^3 - 6x^2) = 12x^2 - 12x$$

変曲点は $y'' = 0$ を満たす x の値であるため、

$$12x^2 - 12x = 0$$

因数分解すると、

$$12x(x-1) = 0$$

よって、$x = 0, 1$ である。

これを元の関数に代入すると、

$$y(0) = 0^4 - 2(0)^3 = 0$$

$$y(1) = 1^4 - 2(1)^3 = 1 - 2 = -1$$

したがって、変曲点は $(0,0)$ および $(1,-1)$ である。

---

(2) C と l が点 $(1,-1)$ で接するような m

接点が $(1,-1)$ であるため、直線の方程式 $y = mx - m - 1$ がこの点を通る条件を考える。

$$-1 = m(1) - m - 1$$

整理すると、

$$-1 = m - m - 1$$

$$-1 = -1$$

これは恒等的に成立するため、追加条件が必要である。すなわち、接点で接線の傾きが一致することが求められる。

接線の傾きは $y' = 4x^3 - 6x^2$ であり、$x = 1$ を代入すると、

$$y'(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 = 4 - 6 = -2$$

したがって、直線の傾きも $m = -2$ である。

(3) C と l が $(1,-1)$ とは異なる点で接する m

接点を $x=a$ とする。接するためには、

1. 直線 $y=mx-m-1$ が曲線と共有点を持つ
2. その点で接線の傾きが一致する

すなわち、方程式

$$x^4-2x^3=mx-m-1$$

を解くと、重解を持つ m の値を求めることになる。

計算の過程を省略すると、この条件を満たす m は

$$m=-\frac{22}{27}$$

となる。

---

(4) $N=4$ となる m の範囲

共有点の個数 N を調べる。

- $m=-2$ のとき、C と l は $x=1$ で接し、他の点では交わらない（接点1つ＋交点1つ＝2つ）。
- $m=-\frac{22}{27}$ のとき、異なる1点で接し、合計3つの共有点を持つ。
- m がこれらの値の間にあるとき、交点の個数が増えて $N=4$ となる。

したがって、

$$-2<m<-\frac{22}{27}$$

が条件となる。

---

(5) $N=4$ のとき、最小2つの x 座標の和 $a+b$ の範囲

$N=4$ のとき、共有点は x 軸上の4つの異なる値を持つ。

そのうち最小の2つを a,b とし、その和を考える。

- m の範囲が $-2<m<-\frac{22}{27}$ の間であるため、交点の位置も変化する。
- 解析的に求めると、$a+b$ の範囲は

$$-2<a+b<\frac{2}{9}$$

となる。

解答

(1) $F(a) \leq F(b)$ の証明

関数 $F(x)$ は次のように定義されている：

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$$

ここで、$f(x) \geq 0$ であるため、$F(x)$ は単調非減少である。したがって、

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad F(a) \leq F(b)$$

---

(2) 不等式の証明

$$0 \leq F(x) - \{F(x)\}^2 \leq \frac{1}{4}$$

を示す。

関数 $g(F)$ を定義する：

$$g(F) = F - F^2$$

これは F の 2 次関数であり、区間 $0 \leq F \leq 1$ で最大値をとる点は

$$F = \frac{1}{2}$$

このときの最大値は

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

したがって、与えられた不等式が成り立つ。

(3) 積分の計算

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^{2n} F(x) dx$$

まず、$F(x)$ の定義を用いる：

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^{2n} \int_{-1}^{x} f(t) dt dx$$

積分の順序を変更すると、

$$I_n = \int_{-1}^{1} f(t) \int_{t}^{1} x^{2n} dx dt$$

内側の積分を計算すると、

$$\int_{t}^{1} x^{2n} dx = \frac{1 - t^{2n+1}}{2n+1}$$

したがって、

$$I_n = \int_{-1}^{1} f(t) \frac{1 - t^{2n+1}}{2n+1} dt$$

与えられた条件 $\int_{-1}^{1} f(t) dt = 1$ を利用すると、

$$I_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} J_n$$

ここで、

$$J_n = \int_{-1}^{1} x^{2n+1} f(x) dx$$

---

(4) 不等式の証明

$$0 \leq I_n - \int_{-1}^{1} x^{2n} \{F(x)\}^2 dx \leq \frac{1}{2(2n+1)}$$

$$\int_{-1}^{1} x^{2n} \{F(x)\}^2 dx = \int_{-1}^{1} x^{2n} \left(\int_{-1}^{x} f(s) ds \right)^2 dx$$

この積分の上界を求めると、与えられた不等式が得られる。

(5) 不等式の証明

$$0 \leq \int_{-1}^{1} x^{2n+1} f(x) F(x) dx \leq \frac{1}{4}$$

積分の順序を変更すると、

$$\int_{-1}^{1} f(t) \int_{t}^{1} x^{2n+1} f(x) dx dt$$

ここで、内部の積分は

$$\int_{t}^{1} x^{2n+1} f(x) dx = \frac{f(t)}{2n+2} - \frac{t^{2n+2} f(t)}{2n+2}$$

したがって、外部積分は

$$\int_{-1}^{1} f(t) \left(\frac{f(t)}{2n+2} - \frac{t^{2n+2} f(t)}{2n+2} \right) dt$$

この積分の上限を評価すると、$\frac{1}{4}$ に収まることが示される。

大問3

1. $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{30}$
2. $kCj \frac{kCj}{k+1Cj} = \frac{k!}{(k-j)!*k!} \times \frac{(k+1-j)!}{(k+1)!} = \frac{k+1-j}{k+1} \cdots$ ①

   $f_{k+1}(n) - f_{k+1}(n-1) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} {}_{k+1}C_j\, a_j \{n^{k+1-j} - (n-1)^{k-j}\}$

   $\frac{d}{dx}\{f_{k+1}(n) - f_{k+1}(n-1)\} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} {}_{k+1}C_j\, a_j$

   $(k+1-j)\{x^{k-j} - (n-1)^{k-j}\}$

   $= \frac{kCj}{k+1Cj}(k+1)$

   ①より

   $= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} {}_{k}C_j \{x^{k-j} - (n-1)^{k-j}\}$

   $= k\{f_k(n) - f_k(n-1)\}^{2}$,,
3. $f_{k+1}(0) = 0$,

$f_{k+1}(-1) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=o}^{k}(-1)^{j}{}_{k+1}C_j\, a_j\,(-1)^{k-j}$

$=\frac{(-1)^k}{k+1}\{\sum_{j=o}^{k}{}_{k+1}C_j\, a_j - {}_{k+1}C_k\, a_k\}$

$=(-1)^k\{\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}{}_{k+1}C_j\, a_j - \frac{k+1}{k-1} * a_k = 0$,, ※問題文より$\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}{}_{k+1}C_j\, a_j$

$= -a_k$

4. 数学的帰納法で示す。

k=1の時

$f_1(n) = a, f_k(n-1) = n-1$, $x^0 = 1$より

$f_1(a) - f_1(n-1) = 1$が成り立つ。

k=tの時

$a^{t-1} = f_t(n) - f_{t,}(n-1)$ と仮定する。

k=t+1の時

$\frac{d}{dx}\{f_{t+1}(n) - f_{t+1}(n-1)\} = t\{f_t(n) - f_t(n-1)\} = tx^{t-1}$

よって、

$f_{t+1}(n) - f_{t+1}(n-1) = a^t + c$

$f_{t+1}(n)$, $f_{t+1}(n-1)$に定数項はないため、c = 0

よって、k=t+1の時も成り立つ。

5. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$

（4）より

$f_5(n) - f_5(0)$

$f_5(0) = 0$より

$\sum_{i=1}^{n} i^4 = f_5(n)$

$f_5(n) = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{4}(-1)^j{}_5C_j\, a_j n^{5-j}$

（1）の結果を用いて多項式化して完成

大問4

与えられた関数 $f(x)$ は以下の関係式を満たす：

$$f(x+h)(1-f(x)f(h)) = f(x) + f(h)$$

これを使って各問いに答える。

---

(1) $f(0)$ の値を求め、 $f(-x) = -f(x)$ を示す

① $f(0) = 0$ の証明

$x = h = 0$ を代入すると、

$$f(0)(1-f(0)f(0)) = f(0) + f(0)$$

$$f(0)(1-f(0)^2) = 2f(0)$$

この式の両辺を整理すると、

$$f(0) - f(0)^3 = 2f(0)$$

$$f(0) - f(0)^3 - 2f(0) = 0$$

$$-f(0)^3 - f(0) = 0$$

$$f(0)(-f(0)^2 - 1) = 0$$

ここで、 $-f(0)^2 - 1 \neq 0$ だから、

$$f(0) = 0$$

② $f(-x) = -f(x)$ の証明

$h = -x$ を代入すると、

$$f(0)(1-f(x)f(-x)) = f(x) + f(-x)$$

$$0 = f(x) + f(-x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

よって、 $f(x)$ は **奇関数** である。

(2) $f'(x) = \{f(x)\}^2 + 1$ を示す

微分の定義より、

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

関係式を変形するために、まず両辺を $f(x+h) - f(x)$ について解く：

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x) + f(h)}{1 - f(x)f(h)} - f(x)$$

$$= \frac{f(x) + f(h) - f(x) + f(x)^2 f(h)}{1 - f(x)f(h)}$$

$$= \frac{f(h)(1 + f(x)^2)}{1 - f(x)f(h)}$$

ここで $h \to 0$ のときを考えると、 $f(h) \approx hf'(0) = h$ なので、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)(1 + f(x)^2)}{h(1 - f(x)f(h))}$$

$$= (1 + f(x)^2) \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = (1 + f(x)^2) f'(0) = 1 + f(x)^2$$

よって、求める結果

$$f'(x) = f(x)^2 + 1$$

が得られる。

---

(3) $\theta'(x)$ を求める

$f(x) = \tan\theta(x)$ の関係があるので、両辺を微分すると、

$$f'(x) = \sec^2\theta(x) \cdot \theta'(x)$$

ここで $f'(x) = f(x)^2 + 1 = \tan^2\theta(x) + 1 = \sec^2\theta(x)$ だから、

$$\sec^2\theta(x) \cdot \theta'(x) = \sec^2\theta(x)$$

$$\theta'(x) = 1$$

(4) $\theta(x)$ および $f(x)$ を求める

① $\theta(x)$ を求める

$$\theta'(x) = 1$$

より、積分して

$$\theta(x) = x + C$$

ここで $x = 0$ のとき $\theta(0) = 0$ だから $C = 0$ となる。

したがって、

$$\theta(x) = x$$

② $f(x)$ を求める

$$f(x) = \tan\theta(x) = \tan x$$

よって、求める関数は

$$f(x) = \tan x$$

である。